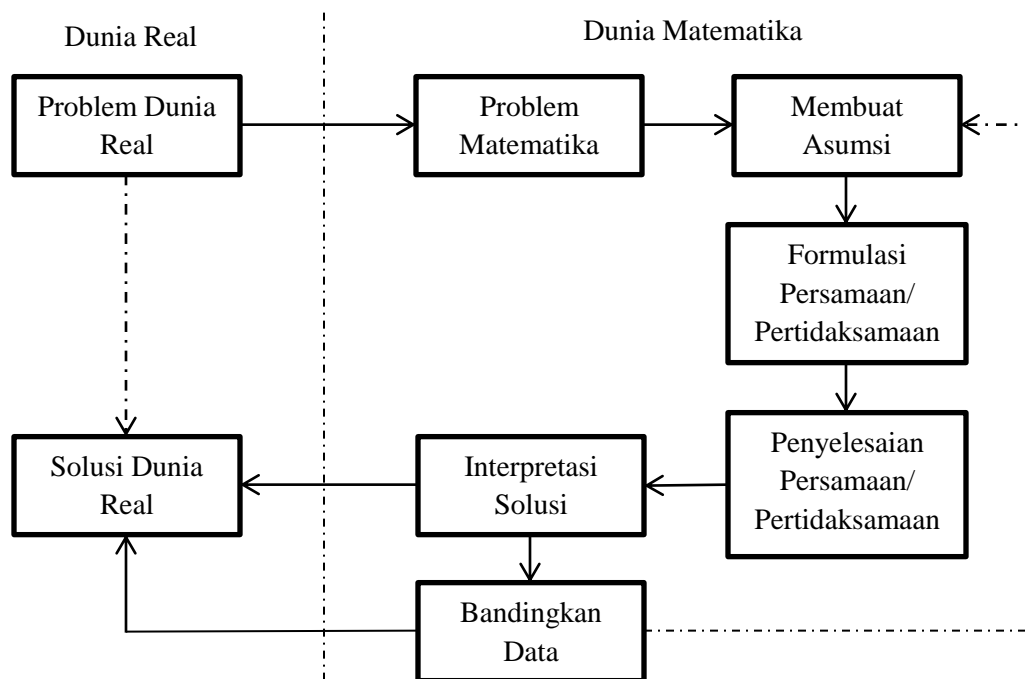


BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diuraikan beberapa teori-teori yang digunakan sebagai acuan dalam penulisan skripsi ini. Teori-teori yang digunakan berupa definisi-definisi serta teorema-teorema yaitu sebagai berikut:

A. Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang digunakan untuk merepresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau masalah-masalah pada dunia nyata dalam pernyataan matematik (Widowati dan Sutimin, 2007:1). Beberapa tahap dalam menyusun model matematika dapat dinyatakan dalam Gambar 2.1:



Gambar 2.1 Proses Pemodelan Matematika.

Representasi matematika yang dihasilkan dari proses pemodelan dinamakan model matematika. Model matematika dapat dimanfaatkan dalam berbagai bidang studi yang berbeda.

Berdasarkan Gambar 2.1, langkah-langkah untuk proses pemodelan matematika sebagai berikut

1. Menyatakan problem dunia nyata ke dalam pengertian matematika

Untuk mempermudah mencari penyelesaian masalah yang ada di dunia nyata yaitu dengan memodelkan masalah tersebut ke dalam bahasa matematis karena terkadang penyelesaian masalah dunia nyata secara langsung sulit dilakukan. Adapun dalam langkah pertama ini yaitu menentukan variabel-variabel yang terdapat dalam masalah nyata dan membentuk beberapa hubungan variabel-variabel yang diperoleh tersebut menjadi suatu sistem model.

2. Mengkontruksi kerangka dasar model

Dalam langkah ini, hal yang dilakukan yaitu membuat asumsi-asumsi model dari masalah di dunia nyata. Asumsi yang terbentuk pada dasarnya mencerminkan bagaimana proses berfikir sehingga model dapat berjalan. Asumsi-asumsi tersebut dibuat agar model yang dihasilkan dapat menggambarkan masalah dunia nyata secara tepat.

3. Membuat formulasi persamaan/pertidaksamaan

Berdasarkan variabel-variabel yang telah ditentukan, hubungan antara variabel-variabel dan asumsi-asumsi yang telah dibuat dibentuk suatu persamaan atau pertidaksamaan yang menggambarkan masalah yang ada dalam dunia nyata.

Langkah ini merupakan langkah yang paling penting dan sulit. Terkadang diperlukan adanya pengujian kembali asumsi-asumsi agar proses formulasi persamaan sesuai, sehingga dapat diselesaikan dan realistik.

4. Menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan

Setelah terbentuk persamaan atau pertidaksamaan, dalam langkah ini yang dilakukan yaitu mencari penyelesaiannya untuk memperoleh solusi dari model matematika dengan penyelesaian secara matematis. Namun tidak semua model matematika dapat dengan mudah dicari solusinya. Persamaan model matematika mungkin saja tidak memiliki solusi atau bahkan mempunyai lebih dari satu solusi. Oleh karena itu, pada langkah ini dapat dilakukan analisis sifat atau perilaku dari solusi model matematika tersebut.

5. Interpretasi hasil atau solusi

Interpretasi hasil atau solusi adalah salah satu langkah terakhir yang akan menghubungkan kembali formulasi model matematika ke masalah dunia nyata. Interpretasi dapat diwujudkan dalam berbagai cara, salah satunya dengan bentuk grafik yang digambarkan berdasarkan solusi yang diperoleh kemudian diinterpretasikan sebagai solusi dunia nyata. Selanjutnya solusi yang didapatkan dibandingkan dengan beberapa data yang ada dan dihubungkan untuk melihat ketepatan model yang dibuat dengan situasi di dunia nyata. Apabila solusi yang didapatkan belum sesuai dengan situasi di dunia nyata maka dapat ditinjau ulang asumsi-asumsi yang telah dibuat sebelumnya.

B. Persamaan Diferensial

Pemodelan matematika penyebaran penyakit menular MERS-CoV berbentuk persamaan diferensial. Oleh karena itu, pada subbab ini akan dikaji tentang persamaan diferensial.

Definisi 2.1 (Ross, 2004:3)

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.1

Berikut adalah contoh-contoh persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 5y = 0 \quad 2.1a$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 3x = 0 \quad 2.1b$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} - u = 0 \quad 2.1c$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v \quad 2.1d$$

Berdasarkan jumlah variabel bebas yang terlibat, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua bentuk persamaan yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

1. Persamaan Diferensial Biasa

Definisi 2.2 (Ross, 2004:4)

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

2. Persamaan Diferensial Parsial

Definisi 2.3 (Ross, 2004:4)

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Pada Contoh (2.1a) dan (2.1b) merupakan persamaan diferensial biasa karena terdapat satu variabel bebas yaitu variabel x sedangkan pada Contoh (2.1c) dan (2.1d) merupakan persamaan diferensial parsial karena terdapat dua variabel bebas yaitu variabel s dan t untuk Persamaan (2.1c) dan variabel x dan y untuk Persamaan (2.1d).

C. Solusi Persamaan Diferensial

Definisi 2.4 (Ross, 2004: 8)

Diberikan suatu persamaan diferensial orde- n berikut:

$$F = \left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n} \right] = 0 \quad (2.2)$$

dengan F adalah fungsi real.

1. *Misalkan f adalah fungsi bilangan real yang terdefinisi untuk semua x dalam interval I dan mempunyai turunan ke- n untuk semua $x \in I$. Fungsi f disebut solusi eksplisit dari (2.2) dalam interval I jika fungsi f memenuhi syarat berikut:*

a. $F = [x, f(x), f'(x), \dots, f^n(x)],$ terdefinisi $\forall x \in I$

b. $F = [x, f(x), f'(x), \dots, f^n(x)] = 0, \forall x \in I$

Hal ini berarti bahwa substitusi $f(x)$ dan variasi turunan y dan turunannya yang berkorespondensi ke (2.2) akan membuat (2.2) menjadi suatu identitas di interval I .

2. Suatu relasi $g(x, y) = 0$ disebut solusi implisit dari Persamaan (2.2) jika relasi ini mendefinisikan sedikitnya satu fungsi bilangan real f dengan variabel x di interval I .
3. Solusi eksplisit dan solusi implisit biasa disebut sebagai solusi sederhana.

Contoh 2.2

Carilah solusi dari persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Penyelesaian:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

$$dN = kN dt$$

$$\int \frac{1}{N} dN = \int k dt$$

$$\ln|N| = kt + C$$

$$N(t) = e^{kt} + C.$$

Jadi, solusi dari persamaan diferensial $\frac{dN}{dt} = kN$ adalah $N(t) = e^{kt} + C$.

D. Sistem Persamaan diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah kumpulan dari beberapa persamaan diferensial. Diberikan vektor $x \in E, E \subseteq \mathbb{R}^n$ dengan $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ dan E

adalah himpunan terbuka dari \mathbb{R}^n . Fungsi $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ dengan $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T$ dan $f \in C'(E)$. $C'(E)$ adalah himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di E . Jika $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ menyatakan turunan pertama x terhadap t , maka sistem persamaan diferensial dapat dituliskan menjadi,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Sistem (2.3) dapat dituliskan menjadi,

$$\dot{x} = f(x).\tag{2.4}$$

Berdasarkan kelinearannya sistem persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear.

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Sistem persamaan diferensial linear orde satu dapat muncul dalam masalah yang melibatkan beberapa variabel tak bebas x_1, x_2, \dots, x_n dan variabel bebas t . Secara umum, sistem persamaan diferensial linear orde satu dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Jika setiap nilai $b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)$ adalah nol, maka Sistem Persamaan (2.5) disebut sistem persamaan diferensial linear homogen, sedangkan jika tidak bernilai nol, maka Sistem Persamaan (2.5) disebut sistem persamaan diferensial nonhomogen.

Notasi matriks Sistem Persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

atau dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)\tag{2.6}$$

dengan,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

Persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut ini (Ross, 2004:5):

- a. Memuat variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya berpangkat selain satu.

- b. Terdapat perkalian pada variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya
- c. Terdapat fungsi transendental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

Contoh 2.3

Berikut diberikan contoh sistem persamaan diferensial linear.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + 3y - 7z \\ \frac{dy}{dt} &= x - 4y - 2z \\ \frac{dz}{dt} &= 5x - 6y + 9z\end{aligned}\tag{2.7}$$

Sistem Persamaan Diferensial (2.7) merupakan persamaan diferensial linear homogen.

2. Sistem Persamaan Diferensial Non Linear

Definisi 2.5 (Ross, 2004: 5)

Persamaan diferensial nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linear.

Contoh 2.4

Berikut contoh-contoh persamaaan diferensial nonlinear:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 3x = 0\tag{2.8a}$$

$$5y \frac{dy}{dx} + 2x = 0\tag{2.8b}$$

$$\frac{dy}{dx} + xy - e^x = 0.\tag{2.8c}$$

Persamaan (2.8a) memuat variabel tak bebas yang berpangkat tiga $\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)$ dan turunannya yang berpangkat dua $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ sehingga persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial nonlinear. Persamaan (2.8b) memuat perkalian variabel tak bebas dan turunannya $\left(5y \frac{dy}{dx}\right)$ sehingga persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial nonlinear, dan Persamaan (2.8c) memuat fungsi transenden (e^x), maka pada persamaan tersebut juga merupakan persamaan diferensial nonlinear.

Sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinear, jika persamaan diferensial yang membentuknya merupakan persamaan diferensial nonlinear.

Contoh 2.5

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = x + xy^2 \quad (2.9a)$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 + 3y - \cos x. \quad (2.9b)$$

Sistem Persamaan (2.9) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x dan y , karena memuat persamaan diferensial nonlinear yaitu pada Persamaan (2.9a) terdapat perkalian dari variabel tak bebasnya dan pada Persamaan (2.9b) terdapat variabel tak bebasnya yang berpangkat dua.

Analisis dari sistem persamaan diferensial nonlinear ini akan lebih mudah dilakukan jika sistem persamaan diferensial nonlinear diubah ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial linear.

E. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai Eigen adalah suatu nilai yang digunakan untuk mengetahui kestabilan suatu sistem. Adapun definisi dari nilai eigen adalah sebagai berikut

Definisi 2.6 (Anton, 2010:277)

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam \mathbb{R}^n dinamakan vektor eigen (eigenvector) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x yakni,

$$Ax = \lambda x \quad (2.10)$$

untuk suatu skalar λ , skalar λ dinamakan nilai eigen (eigenvalue) dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$, maka dituliskan kembali Persamaan (2.10) sebagai

$$Ax = \lambda Ix, \quad (2.11)$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)x = 0. \quad (2.12)$$

Menurut Howard (2010:278), Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari Persamaan (2.12). Persamaan (2.12) akan mempunyai pemecahan tak nol (solusi non trivial) jika dan hanya jika,

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) dinamakan persamaan karakteristik A dan skalar yang memenuhi Persamaan (2.13) adalah nilai eigen dari A .

$$\det(\lambda I - A)x = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n$$

sehingga karakteristik dari A menjadi,

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

dengan $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Contoh 2.6

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari A .

Penyelesaian:

Akan dicari nilai eigen dari matriks A ,

$$\det(\lambda I - A)x = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 9 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0.$$

Jadi diperoleh nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = -2$ dan $\lambda = 1$. Akan dicari vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks A .

Untuk $\lambda = -2$,

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 + 2 & -9 \\ 0 & -2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$0x_1 - 9x_2 = 0$$

$$0x_1 - 3x_2 = 0$$

$$x_2 = 0$$

sehingga $x_1 = s$ dan $x_2 = 0$, $s \in \mathbb{R}$, maka vektor eigen dari A yang bersesuaian

dengan $\lambda = -2$ adalah $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda = 1$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1+2 & -9 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$3x_1 - 9x_2 = 0$$

$$0x_1 - 0x_2 = 0$$

$$3x_1 = 9x_2$$

$$x_1 = 3x_2$$

sehingga $x_1 = 3t$ dan $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$, maka vektor eigen dari A yang bersesuaian

dengan $\lambda = 1$ adalah $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Jadi diperoleh vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen dari

matriks A yaitu $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

F. Titik Ekuilibrium

Suatu langkah terbaik dalam memulai menganalisis sistem nonlinear untuk Sistem Persamaan (2.4) adalah menentukan titik ekuilibrium dari Sistem Persamaan (2.4) dan menjelaskan perilaku (2.4) disekitar titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan merupakan solusi dari Sistem Persamaan (2.4) yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu. Definisi tentang titik ekuilibrium akan dijelaskan pada Definisi 2.7 berikut ini,

Definisi 2.7 (Perko, 2000:102)

Titik $x_0 \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium atau titik kritis dari Sistem Persamaan (2.4) jika $f(x_0) = 0$

Contoh 2.7

Akan dicari titik ekuilibrium dari sistem berikut ini:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy + x \\ \dot{y} &= y^2 + x.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Penyelesaian:

Misalkan $\bar{x} = (\bar{x}, \bar{y})^T$ adalah titik ekuilibrium dari Sistem (2.14), maka:

$$\bar{x}\bar{y} + \bar{x} = 0\tag{2.15}$$

$$\bar{y}^2 + \bar{x} = 0\tag{2.16}$$

dari Persamaan (2.15) diperoleh,

$$\begin{aligned}\bar{x}(\bar{y} + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= 0 \text{ atau } \bar{y} = -1.\end{aligned}$$

Substitusikan $\bar{x} = 0$ ke Persamaan (2.16) sehingga diperoleh $\bar{y} = 0$. Jika $\bar{y} = -1$ disubstitusikan ke Persamaan (2.16) sehingga diperoleh:

$$(-1)^2 + \bar{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = -1.$$

Jadi Sistem (2.14) memiliki titik ekuilibrium yaitu $(0,0)^T$ dan $(-1, -1)^T$.

G. Linearisasi

Proses linearisasi perlu dilakukan pada model matematika penyebaran MERS-CoV karena persamaan yang diperoleh dari model tersebut berupa persamaan nonlinear. Linearisasi adalah proses mengubah suatu sistem persamaan diferensial nonlinear menjadi sistem persamaan diferensial linear. Proses ini dilakukan dengan linearisasi di sekitar titik ekuilibrium. Namun sebelum membahas proses linearisasi tersebut akan dibahas terlebih dahulu mengenai matriks jacobian yang akan dijelaskan pada Teorema 2.1 berikut:

Teorema 2.1 (Perko,2000:67)

Jika $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ terdiferensial di x_0 maka turunan parsial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j=1,2,3,\dots,n$, di

x_0 ada untuk semua $x \in \mathbb{R}^n$ dan

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j.$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= Df(x_0)x
\end{aligned}$$

Matriks $Df(x_0)x$ disebut matriks *jacobian* dari fungsi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ yang terdiferensial di $x_0 \in \mathbb{R}^n$. $Df(x_0)$ dapat dinotasikan dengan $Jf(x_0)$. Selanjutnya akan ditunjukkan proses linearisasi dari sistem persamaan diferensial nonlinear ke dalam sistem persamaan diferensial linear.

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear yaitu Sistem (2.4) dengan $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, f merupakan fungsi nonlinear dan kontinu. Misalkan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T$ adalah titik ekuilibrium Sistem (2.4). maka pendekatan linear Sistem (2.4) disekitar titik ekuilibrium diperoleh dengan menggunakan deret Taylor dari fungsi f disekitar titik ekuilibrium $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T$ yaitu:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T \\
&= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + Rf_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T \\
&= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + Rf_2
\end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned}
f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T \\
&= f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) \\
&\quad + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + Rf_n
\end{aligned}$$

karena $Rf_1, Rf_2, Rf_3, \dots, Rf_n$ nilainya mendekati nol sehingga dapat diabaikan. dan

karena $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T$ titik ekuilibrium dari Sistem (2.4), maka

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T = f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T = \dots =$$

$$f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T = 0, \text{ sehingga diperoleh:}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots \\ & + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots \\ & + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots \\ & + \frac{\partial f_3}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) \end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned} \dot{x}_n = & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots \\ & + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n). \end{aligned}$$

Sistem Persamaan (2.17) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Misalkan $y_1 = (x_1 - \bar{x}_1)$, $y_2 = (x_2 - \bar{x}_2)$, ..., $y_n = (x_n - \bar{x}_n)$ sehingga diperoleh,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Matriks *jacobian* dari Persaman (2.18) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix},$$

jika matriks *jacobian* J memiliki nilai eigen yang tidak nol pada bagian realnya, maka sifat kestabilan sistem dapat dilihat dari,

$$\dot{x} = J(f(x_0))x \quad (2.19)$$

Persamaan (2.19) disebut hasil linearisasi dari Sistem Persamaan (2.4). Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai linearisasi pada sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

Definisi 2.8 (Perko, 2000:102)

Diberikan matrik jacobian $J(f(x_0))$. Sistem Linear $\dot{x} = J(f(x_0))x$ disebut linearisasi dari Sistem Persamaan (2.4) di x_0 .

Setelah dilakukannya linearisasi, maka dapat dilihat perilaku kestabilan dari sistem persamaan diferensial nonlinear disekitar titik ekuilibrium. Kestabilan Sistem (2.4) disekitar titik ekuilibrium x_0 dapat dilihat dari kestabilan hasil linearisasinya jika x_0 hiperbolik. Diberikan definisi untuk titik ekuilibrium hiperbolik yang dijelaskan pada Definisi 2.9 berikut ini:

Definisi 2.9 (Perko, 2000:102)

Titik ekuilibrium $x_0 \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari Sistem (2.4) jika tidak ada nilai eigen dari matriks $J(f(x_0))$ yang mempunyai bagian real nol.

Contoh 2.8

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 - x_1 - x_2^2\end{aligned}\tag{2.20}$$

Sistem (2.20) memiliki titik ekuilibrium yaitu $\bar{x}_1 = (0,0)^T$, $\bar{x}_2 = (0,2)^T$ dan $\bar{x}_3 = (1,1)^T$. Akan dicari matriks jacobian di titik-titik ekuilibrium serta akan diidentifikasi untuk masing-masing titik ekuilibrium tersebut.

Matriks jacobian dari Sistem (2.20) adalah

$$J(f(\bar{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1 - x_1x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1 - x_1x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(2x_2 - x_1 - x_2^2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(2x_2 - x_1 - x_2^2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - x_2) & -x_1 \\ -1 & 2 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

untuk $\bar{x}_1 = (0,0)^T$

$$J((0,0)^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

nilai eigen untuk $J((0,0)^T)$ yaitu

$$|\lambda I - J((0,0)^T)| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 1 + 0i \vee \lambda = 2 + 0i.$$

Bagian real dari nilai eigen tidak nol sehingga titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = (0,0)^T$ merupakan titik ekuilibrium hiperbolik.

Untuk $\bar{x}_1 = (0,2)^T$

$$J((0,2)^T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

nilai eigen untuk $J((0,2)^T)$ yaitu

$$|\lambda I - J((0,2)^T)| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = -1 + 0i \vee \lambda = -2 + 0i.$$

Bagian real dari nilai eigen tidak nol sehingga titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = (0,2)^T$ merupakan titik ekuilibrium hiperbolik.

$$\text{Untuk } \bar{x}_1 = (1,1)^T \begin{bmatrix} (1-x_2) & -x_1 \\ -1 & 2-2x_2 \end{bmatrix}$$

$$J((0,2)^T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

nilai eigen untuk $J((1,1)^T)$ yaitu

$$|\lambda I - J((1,1)^T)| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = -1 + 0i \vee \lambda = 1 + 0i.$$

Bagian real dari nilai eigen tidak nol sehingga titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = (1,1)^T$ merupakan titik ekuilibrium hiperbolik.

H. Kestabilan

Kestabilan di titik ekuilibrium secara umum dibagi menjadi tiga jenis yaitu stabil, stabil asimtotik dan tidak stabil. Kestabilan titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear akan dijelaskan pada Definisi 2.10 dan Teorema 2.2 berikut:

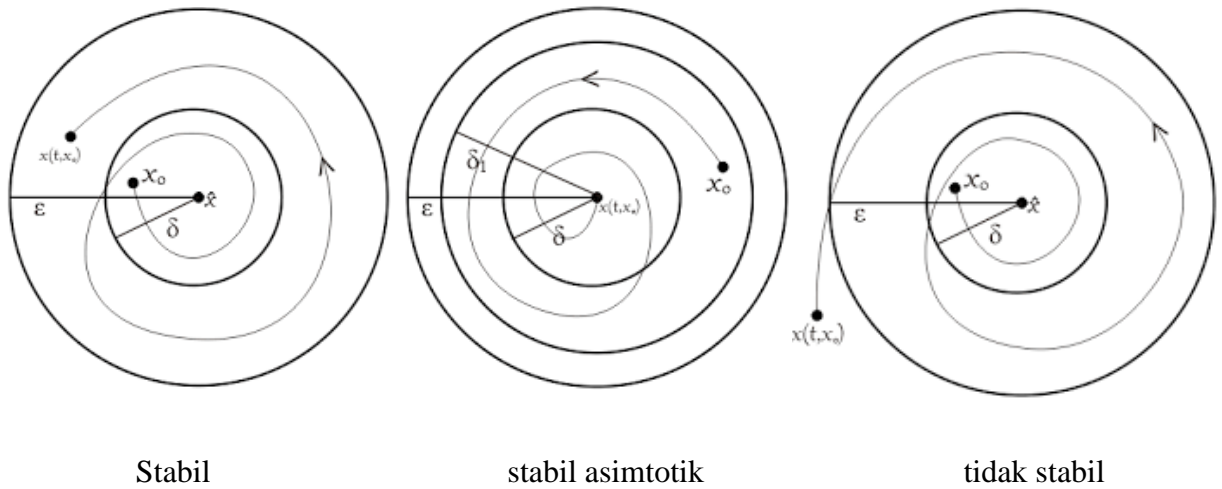
Definisi 2.10 (Olsder, 2004: 57)

Diberikan persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(\bar{x})$ dan $x(t, x_0)$ adalah solusi persamaan $\dot{x} = f(\bar{x})$ pada saat t dengan kondisi awal $x(0) = x_0$.

1. Vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut sebagai titik ekuilibrium.
2. Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.
3. Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan stabil asimtotik jika titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$, sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$.

4. Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan tidak stabil jika titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tidak memenuhi (2).

Ilustrasi dari Definisi 2.10 disajikan pada Gambar 2.2 berikut:



Gambar 2.2. Ilustrasi Kestabilan

Menganalisis kestabilan pada sistem persamaan diferensial di titik sekitar titik ekuilibrium tidak mudah dilakukan. Oleh karena itu, diberikan penjelasan mengenai sifat-sifat kestabilan suatu sistem yang ditinjau dari nilai eigen untuk mempermudah menganalisis kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibrium. Penjelasan tersebut dijelaskan dalam Teorema 2.2 berikut:

Teorema 2.2 (Olsder, 2004: 58)

Diberikan persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$, dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$, mempunyai k nilai eigen yang berbeda yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$.

1. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $\Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$.
2. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $\Re(\lambda_i) \leq 0$, untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$ dan untuk setiap nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen sama.
3. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $\Re(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1, 2, 3, \dots, k$ atau terdapat nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar lebih besar daripada multiplisitas geometri untuk nilai eigen.

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $\Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

(\Rightarrow)

Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik maka $\Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Menurut Definisi 2.10, titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$. Sehingga untuk $t \rightarrow \infty$, $x(t, x_0)$ menuju $\bar{x} = 0$. $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan $\dot{x} = Ax$, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re(\lambda_i)t}$. Artinya agar $e^{\Re(\lambda_i)t}$ menuju $\bar{x} = 0$ maka $\Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

(\Leftarrow)

Jika $\Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

Solusi $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re(\lambda_i)t}$. Jika $\Re(\lambda_i) < 0$ maka untuk $t \rightarrow \infty$, $e^{\Re(\lambda_i)t}$ akan menuju $\bar{x} = 0$. Berdasarkan Definisi 2.10, titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

2. Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $\Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$ dan untuk setiap nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner $\Re(\lambda_i) < 0$ dengan yang multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen harus sama.

(\Rightarrow)

Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil maka $\Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Andai $\Re(\lambda_i) > 0$, maka solusi persamaan diferensial $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re(\lambda_i)t}$ akan menuju ∞ (menjauh dari titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$). Untuk $t \rightarrow \infty$, sehingga sistem tidak stabil. Hal ini terjadi kontraposisi dengan pernyataan jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Jadi terbukti bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

(\Leftarrow)

Jika $\Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil dan jika ada $\Re(\lambda_i) = 0$ maka multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen harus sama.

$x(t, x_0)$ adalah solusi dari Sistem Persamaan (2.8) maka $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re(\lambda_i)t}$. Jika $\Re(\lambda_i) < 0$ maka $e^{\Re(\lambda_i)t}$ akan menuju $\bar{x} = 0$ yang artinya stabil asimtotik. Titik ekuilibrium yang stabil asimtotik pasti stabil. Jika $\Re(\lambda_i) = 0$ maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Menurut Luenberger (1979: 85), multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen dan multiplisitas geometri berhubungan dengan vektor eigen. Oleh karena itu, akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama. Ambil sebarang sistem di \mathbb{R}^n yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni.

Diambil sistem sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ dengan } s > 0, t > 0 \quad (2.21)$$

a. Akan ditentukan nilai eigen dari Sistem (2.21),

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -s \\ t & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & s \\ -t & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + st = 0.$$

Akar-akar Persamaan (2.21) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4st}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{st}i}{2} = \pm\sqrt{st}i$$

sehingga $\lambda_1 = \sqrt{st} i$ dan $\lambda_2 = -\sqrt{st} i$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \sqrt{st} i$,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{st} i & s \\ -t & \sqrt{st} i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka,

$$\left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{st} i & s & 0 \\ -t & \sqrt{st} i & 0 \end{array} \right] R_1 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -t & \sqrt{st} i & 0 \\ \sqrt{st} i & s & 0 \end{array} \right] -\frac{1}{t} R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{\sqrt{st} i}{t} & 0 \\ \sqrt{st} i & s & 0 \end{array} \right] R_2 - \sqrt{st} i R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{\sqrt{st} i}{t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

setelah itu diubah ke bentuk seperti pada persamaan awal sehingga menjadi,

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{i\sqrt{st}}{t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh,

$$x_1 - \frac{i\sqrt{st}}{t} x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{i\sqrt{st}}{t} x_2.$$

Misal $x_2 = u$, maka $x_1 = \frac{i\sqrt{st}}{t} u$. Sehingga diperoleh,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{st}}{t} u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{st}}{t} \\ 1 \end{bmatrix} u$$

ambil $u = 1$, maka diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \sqrt{st} i$

$$\text{yaitu } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{st}}{t} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -\sqrt{st} i$,

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{st} i & s \\ -t & -\sqrt{st} i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka,

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\sqrt{st} i & s & 0 \\ -t & -\sqrt{st} i & 0 \end{array} \right] R_1 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -t & -\sqrt{st} i & 0 \\ -\sqrt{st} i & s & 0 \end{array} \right] - \frac{1}{t} R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{\sqrt{st} i}{t} & 0 \\ -\sqrt{st} i & s & 0 \end{array} \right] R_2 + \sqrt{st} i R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{\sqrt{st} i}{t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

setelah itu diubah ke bentuk seperti pada persamaan awal sehingga menjadi,

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{i\sqrt{st}}{t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh,

$$x_1 + \frac{i\sqrt{st}}{t} x_2 = 0$$

$$x_1 = -\frac{i\sqrt{st}}{t}x_2$$

Misal $x_2 = v$, maka $x_1 = -\frac{i\sqrt{st}}{t}v$. Sehingga diperoleh,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{st}}{t}v \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{st}}{t} \\ 1 \end{bmatrix} v$$

ambil $v = 1$, maka diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -\sqrt{st}i$

yaitu $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{st}}{t} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Jadi terbukti bahwa banyaknya nilai eigen sama dengan banyaknya vektor eigen.

3. Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $\Re(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1, 2, 3, \dots, k$ atau terdapat nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner $\Re(\lambda_i) = 0$ dengan yang multiplisitas aljabar lebih besar daripada multiplisitas geometri untuk nilai eigen.

(\Rightarrow)

Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil maka $\Re(\lambda_i) > 0$, untuk beberapa $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Titik ekuilibrium tidak stabil apabila $t \rightarrow \infty$, $x(t, x_0)$ menuju ∞ .

Hal tersebut terjadi apabila $\Re(\lambda_i) > 0$.

(\Leftarrow)

Jika $\Re(\lambda_i) > 0$, untuk beberapa $i = 1, 2, 3, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil. Apabila $\Re(\lambda_i) > 0$, $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re(\lambda_i)t}$ akan selalu menuju ∞ . Oleh karena itu, titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil.

Disimpulkan bahwa untuk melihat kestabilan Sistem (2.4) digunakan linearisasi agar Sistem (2.4) menjadi sistem linear $\dot{x} = Ax$ dimana $A = J(f(\bar{x}))$ adalah matriks *Jacobian*. Kestabilan yang dimaksud adalah kestabilan lokal. Titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan stabil asimtotik lokal jika semua nilai eigen matriks *Jacobian* mempunyai bilangan real negatif.

I. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar, dinotasikan R_0 adalah angka harapan banyaknya kasus baru (sekunder) yang dihasilkan dalam suatu populasi rentan oleh individu yang terinfeksi (kasus primer). Jika $R_0 < 1$, maka rata-rata individu yang terinfeksi menghasilkan kurang dari satu individu yang terinfeksi baru selama periode menular dan infeksi tidak bisa tumbuh. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka setiap individu yang terinfeksi menghasilkan rata-rata lebih dari satu infeksi baru sehingga penyakit dapat menyerang populasi.

Dalam model kompartemen untuk penularan penyakit, suatu kompartemen (kelas) disebut kompartemen penyakit jika individu-individu didalamnya terinfeksi penyakit. Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Dimisalkan x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi dengan $x \in \mathbb{R}^n$ dan $y \in \mathbb{R}^m$ untuk $n, m \in \mathbb{N}$. Model kompartemen (kelas) dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y), i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \dot{y} &= \eta_j(x, y), j = 1, 2, 3, \dots, m\end{aligned}\tag{2.22}$$

φ_i merupakan matriks dari laju individu baru terinfeksi penyakit yang menambah kelas terinfeksi dan ψ_i merupakan matriks laju perkembangan penyakit, kematian dan kesembuhan yang mengurangi kelas terinfeksi.

Penentuan bilangan reproduksi dasar R_0 berdasarkan linearisasi dari Sistem (2.22) pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen kelas terinfeksi yang telah dilinearisasi pada titik ekuilibrium bebas penyakit adalah sebagai berikut,

$$\dot{x} = (F - V)x$$

dengan F dan V matriks berukuran $n \times n$,

$$F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0, y_0) \text{ dan } V = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(0, y_0)$$

dimana $(0, y_0)$ merupakan titik ekuilibrium bebas penyakit.

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai berikut:

$$K = FV^{-1} \tag{2.23}$$

K disebut *next generation matrix*. Penentuan bilangan reproduksi dasar (R_0) ini akan diperoleh dengan mencari nilai eigen terbesar dari *next generation matrix* (P. Van Den Driessche dan J. Watmough, 2002) ditulis,

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \tag{2.24}$$

dengan,

$\rho(K)$: menunjukkan radius spektral dari matriks K

F : laju kemunculan infeksi baru pada kompartemen ke- i di titik E_0

V : laju perpindahan individu yang keluar dari kompartemen ke- i di titik E_0

Contoh 2.9

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R.\end{aligned}\tag{2.25}$$

S menyatakan populasi individu rentan terhadap penyakit pada saat t , I menyatakan populasi terinfeksi pada saat t dan R menyatakan populasi individu pulih pada saat t . Sistem (2.25) mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit $(1,0,0)$. Pada Sistem (2.25) kelas terinfeksi adalah I . *Next generation matrix* dapat diperoleh dari kelas I sehingga kelas I dapat dituliskan sebagai berikut:

$$I(t) = \varphi((S, R)I) - \psi((S, R)I),$$

$\varphi = [\beta SI]$ dan $\psi = [\gamma I + \mu I]$. Hasil linearisasi dari φ dan ψ masing-masing adalah

$$F = \frac{\partial \varphi}{\partial I} = \frac{\partial(\beta SI)}{\partial I} = \beta S$$

$$V = \frac{\partial \psi}{\partial I} = \frac{\partial(\gamma I + \mu I)}{\partial I} = \gamma + \mu.$$

Sehingga diperoleh *next generation matrix* berikut:

$$K = FV^{-1} = [\beta S] \left[\frac{1}{\gamma + \mu} \right] = \frac{\beta S}{\gamma + \mu}. \quad (2.26)$$

Selanjutnya, substitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1,0,0)$ ke Persamaan (2.26) maka diperoleh,

$$K = \frac{\beta}{\gamma + \mu}.$$

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks K .

Jadi, nilai bilangan reproduksi dasar dari Sistem (2.26) adalah

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu}.$$